ΜΑΘΗΜΑ 52
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8η ΔΕΚΑΔΑ

71.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$

Αν επιπλέον ισχύει $f'(x)+2x = 2x\left(f(x)+x^2\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2,\ x\in\mathbb{R}$

iv) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt,\ x\geq 0$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' θα είναι γνησίως αύξουσα, οπότε :

- για $x>0 \Rightarrow f'(x)>f'(0)$

  $f'(x)>0$

  f γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ (αφού είναι και συνεχής)

- για $x<0 \Rightarrow f'(x)<f'(0)$

  $f'(x)<0$

  f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$ (αφού είναι και συνεχής)

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, οπότε $f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$f(x)\geq 1$

ii)

Για το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 xf(xt)dt = x\int_0^1 f(xt)dt$, θέτουμε $xt=u \Rightarrow du=xdt$

για $t=0 \Rightarrow u=0$

για $t=1 \Rightarrow u=x$

Άρα $I=\int_0^x f(u)du$

Επειδή η f είναι συνεχής, η συνάρτηση $\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du + x^3}{\eta\mu^3 x} = \cancel{\frac{0}{0}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x f(u)du + x^3\right)'}{\left(\eta\mu^3 x\right)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3x^2}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3\sigma\upsilon\nu x}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}+\frac{3x^2}{\eta\mu^2 x}\right)\right] \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως : $\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\sigma\upsilon\nu x}=\frac{1}{3}$, $\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\eta\mu^2 x}=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\eta\mu x}\right)^2=3\cdot 1^2=3$

Ακόμα , επειδή η f είναι συνεχής στο 0 , έχουμε $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$

Αλλά και $\lim_{x\to 0}\eta\mu^2 x=0$ με $\eta\mu^2 x>0$ κοντά στο 0. Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu^2 x}=+\infty$

(1) $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x}=\frac{1}{3}(+\infty+3)=+\infty$

iii)

$f(x)\ \geq 1 \ \Rightarrow\ f(x)+x^2 > 0$

Η υπόθεση $f'(x)+2x=2x(f(x)+x^2)$ $\Rightarrow$ $\frac{f'(x)+2x}{f(x)+x^2}=2x$

$$\left(\ln(f(x)+x^2\right)' = (x^2)'$$

$$\ln\left(f(x)+x^2\right)=x^2+c\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

Για $x=0$ έχουμε $\ln 1 = c \Leftrightarrow c=0$

Άρα $\ln\left(f(x)+x^2\right)=x^2 \Leftrightarrow f(x)+x^2=e^{x^2}$

$$f(x)=e^{x^2}-x^2\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

iv)

$h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt = \int_x^{\alpha} f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+2} f(t)dt$

$= -\int_{\alpha}^{x} f(t)dt+\int_{\alpha}^{x+2} f(t)dt$, όπου $\alpha>0$ σταθερός.

$h'(x)=\left(-\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)'+\left(\int_{\alpha}^{x+2} f(t)dt\right)' = f(x+2)-f(x)\ ,\ x\geq 0$

Είναι $x+2>x\ \geq\ 0 \ \overset{\text{f γν. αύξουσα}}{\Rightarrow}\ f(x+2)>f(x)\ \geq\ f(0)=1$

$f(x+2)-f(x)>0$

$h'(x)>0$

h γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$

Η ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0 \Leftrightarrow \int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt < -\int_6^4 f(t)dt$

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt < \int_4^6 f(t)dt$$

$h(x^2 + 2x + 1) < h(4)$

$h((x+1)^2) < h(4)$

$(x + 1)^2 < 4$

$|x + 1| < 2$

$-2 < x + 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 1$

72.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2)$, $x > -1$,
όπου λ πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$.

i) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω ότι $\lambda = -1$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$, $\alpha \neq 0$, έχει μοναδική λύση.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x+2) = \ln\frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2}$$

Θέτουμε $\dfrac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} = u$

- Όταν $\lambda > -1$, οπότε $\lambda + 1 > 0$

  $$\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} = (\lambda+1)\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = (\lambda+1)(+\infty) = +\infty$$

  Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{(\lambda+1)x^2 + x + 1}{x+2} = \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$ άτοπο

- Όταν $\lambda = -1$, οπότε $\lambda + 1 = 0$

  $$\lim_{x\to+\infty} u = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x+2} = 1$$

  Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to 1}\ln u = 0$

Επομένως το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός όταν $\lambda = -1$

ii)

$$f(x) = \ln\frac{x+1}{x+2}\ , \quad x > -1$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+1}{x+2}}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x+2-(x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} > 0\ , \quad x > -1$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για το $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\ln\dfrac{x+1}{x+2}$

Θέτουμε $\dfrac{x+1}{x+2} = w > 0$, τότε $\lim\limits_{x\to-1^+} w = \lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x+1}{x+2} = 0$, άρα $w \to 0^+$

Οπότε $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\ln\dfrac{x+1}{x+2} = \lim\limits_{w\to 0^+}\ln w = -\infty$

Στο (i) αποδείχθηκε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty\ ,\ 0)$

iii)

Αφού $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

και αφού $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$ η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη

iv)

Έστω $g(x) = f(x) + \alpha^2$, $x \in (-1, +\infty)$

$g'(x) = f'(x) > 0$ οπότε και η g είναι γνησίως αύξουσα

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (f(x) + \alpha^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) + \alpha^2) = \alpha^2 > 0$ αφού $\alpha \neq 0$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $(-\infty, \alpha^2)$, στο οποίο υπάρχει το 0, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, η οποία είναι μοναδική αφού η g είναι γνησίως αύξουσα.

73.

Συνάρτηση $f:[0,\ 2]\to\mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=\kappa\, x\, e^{2x}$, $0\le x\le 2$ και $\kappa\in\mathbb{R}$

$$f'(0)=2f(0)\ ,\quad f'(2)=2f(2)+12e^4\ ,\quad f(1)=e^2$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,\ 2]$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\ 2)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$

iii) Να αποδείξετε ότι $\kappa=6$ και ότι $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,\ 2]$

iv) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx$

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,\ 2]$, η f' είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$ και επομένως η g είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$ (πράξεις συνεχών)

Επίσης η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2)$ (πράξεις παραγωγίσιμων)

$$g(0)=-\frac{f'(0)-2f(0)}{e^0}=-\frac{2f(0)-2f(0)}{e^0}=0$$

$$g(2)=12-\frac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=12-\frac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=0=g(0)$$

Οπότε η g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,\ 2]$

ii)

Λόγω του (i), υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\ 2)$ ώστε $g'(\xi)=0$

Όμως
$$g'(x)=6x-\frac{\big(f''(x)-2f'(x)\big)e^{2x}-2e^{2x}(f'(x)-2f(x))}{(e^{2x})^2}$$
$$=6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x))}{e^{2x}}$$

Η $g'(\xi)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 6\xi-\dfrac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi))}{e^{2\xi}}=0$

$$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)\qquad \textbf{(1)}$$

iii)

Η υπόθεση $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=\kappa\, x\, e^{2x}$ **(2)** για $x=\xi$ γίνεται

$f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=\kappa\,\xi\, e^{2\xi}$ και λόγω της (1)

$6\xi e^{2\xi}=\kappa\,\xi\, e^{2\xi} \quad\Leftrightarrow\quad \kappa=6$

Η (2) γίνεται $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=6\, x\, e^{2x}$

Τότε όμως η $g'(x)$ γίνεται $g'(x) = 6x - \dfrac{f''(x) - 4f'(x) + 4f(x))}{e^{2x}}$

$$= 6x - \frac{6xe^{2x}}{e^{2x}} = 0 \quad \text{για κάθε } x \in [0,\ 2].$$

Άρα $g(x) = c$ για κάθε $x \in [0,\ 2]$ και επειδή $g(0) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

iv)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \quad 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}} = 0$$

$$3x^2e^{2x} - f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$f'(x) - 2f(x) = 3x^2e^{2x}$$

$$e^{-2x}f'(x) - 2e^{-2x}f(x) = 3x^2e^{2x}e^{-2x}$$

$$[e^{-2x}f(x)]' = (x^3)' \quad \text{στο } [0,\ 2]$$

$$e^{-2x}f(x) = x^3 + c$$

Για $x = 1$ έχουμε $e^{-2}f(1) = 1 + c \Leftrightarrow e^{-2}e^2 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $e^{-2x}f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3e^{2x}$

v)

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_1^2 \frac{x^3e^{2x}}{x^2}dx = \int_1^2 xe^{2x}dx = \int_1^2 x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_1^2 - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_1^2 = \ldots.$$

74.

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\ 2]$, ώστε $\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$, $x \in [0,\ 2]$

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\ , & x \in (0,\ 2] \\ 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}\ , & x = 0 \end{cases}$$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,\ 2]$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2)$ και ότι

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}\ ,\ 0 < x < 2$$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\alpha \in (0,\ 2)$ τέτοιος ώστε $H(\alpha) = 0$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi \in (0,\ \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$

Προτεινόμενη λύση

i)

Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$, άρα και η $tf(t)$ είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$, οπότε η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\ 2]$, άρα και συνεχής.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$, άρα η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$, επομένως και συνεχής.

Η G είναι συνεχής στο $(0,\ 2]$ σαν πράξεις συνεχών.

Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} G(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right) \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{H(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{x'}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{xf(x)}{1} = 0\cdot f(0) = 0$$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to 0^+}\int_0^x f(t)dt = \int_0^0 f(t)dt = 0$

(1) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = 0 - 0 + 3 = 3$

Ακόμα $\quad G(0) = 6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = \dfrac{0}{0}$

$$= 6\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}$$

$$= 6\lim_{t\to 0}\frac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} = 6\lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} = 3$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} G(x) = G(0) = 3$

Άρα η G είναι συνεχής και στο $x_o = 0$, επομένως η G είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$

ii)

Η $H(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2)$, οπότε είναι παραγωγίσιμη και η

$\dfrac{H(x)}{x}$ σαν πηλίκο παραγωγίσιμων.

Η $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2)$ αφού f συνεχής σε αυτό.

Άρα η $G(x) = \dfrac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2)$ σαν διαφορά

παραγωγίσιμων με $G'(x) = \left(\dfrac{H(x)}{x}\right)' - \left(\int_0^x f(t)dt\right)'$

$$= \frac{xH'(x) - H(x)}{x^2} - f(x)$$

$$= \frac{x\cdot xf(x) - H(x)}{x^2} - f(x)$$

$$= f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$$

iii)

Δείξαμε ότι η G είναι συνεχής στο $[0,\ 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ 2)$

με $G(0) = 3$.

Ακόμα $\quad G(2) = \dfrac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 \qquad$ **(2)**

Όμως $\quad \int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt = 0$

$$\int_0^2 tf(t)dt = 2\int_0^2 f(t)dt$$

$$H(2) = 2\int_0^2 f(t)dt$$

$$(2) \quad \Rightarrow \quad G(2) = \frac{2\int_0^2 f(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = 3$$

Δηλαδή $G(0) = G(2)$

Ισχύει επομένως για την G το θεώρημα του Rolle στο $[0,\ 2]$, οπότε θα υπάρχει

$\alpha \in (0,\ 2)$ ώστε $G'(\alpha) = 0$

Όμως $G'(x) = -\dfrac{H(x)}{x^2}$ οπότε $G'(\alpha) = 0 \ \Leftrightarrow\ \dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ H(\alpha) = 0$

iv)

Η G είναι συνεχής στο $[0,\ \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ \alpha)$ άρα ισχύει το θεώρημα μέσης τιμής .

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ \alpha)$ ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\dfrac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t)dt + 3 - 3}{\alpha}$$ και επειδή $H(\alpha) = 0$

$$\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\int_0^\alpha f(t)dt}{\alpha}$$

$$\alpha H(\xi) = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

$$\alpha \int_0^\xi t f(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

75.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

i) Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

Για $\alpha = e$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$

iv) Αν $\beta, \gamma \in (-1,\ 0) \cup (0,\ +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,\ 2)$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$f(0) = \alpha^0 - \ln(0+1) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 1$

$f(x) \geq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x > -1$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο 0 του πεδίου ορισμού της και επειδή είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, με βάση το θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(0) = 0$

Αλλά $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \alpha^0 \ln\alpha - \dfrac{1}{0+1}$

$$0 = \ln\alpha - 1$$

$$\ln\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = e$$

ii)

Για $\alpha = e$ έχουμε $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$

$$f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \quad x > -1$$

Άρα η f είναι κυρτή

iii)

Προφανής ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι το 0.

Και επειδή η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε η ρίζα μοναδική

Για $x > 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ f γν. αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$

Για $-1 < x < 0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ f γν. φθίνουσα στο $[-1,\ 0)$

iv)

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$

» $(x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-2)\big(f(\beta)-1\big) + (x-1)\big(f(\gamma)-1\big)$, $x \in [1,\ 2]$

Οπότε αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$ στο διάστημα $(1,\ 2)$

Είναι $g(1) = -\,(f(\beta) - 1)$ και $g(2) = f(\gamma) - 1$

Γνωρίζουμε από το (i) ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 1$.

Άρα $f(\beta) > 1$ και $f(\gamma) > 1 \Rightarrow g(1) < 0$ και $g(2) > 0 \Rightarrow g(1)\,g(2) < 0$

Επομένως , με βάση το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,\ 2)$.

76.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,\ +\infty)$, τέτοια ώστε $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, $x\in[0,\ +\infty)$

$$h(x)=\frac{F(x)}{\int_0^x t\,f(t)dt}\ ,\quad x\in(0,\ +\infty)$$

i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt=F(1)$

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0\,,+\infty)$

Αν επιπλέον ισχύει $h(1)=2$

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt<2\int_0^2 t\,f(t)dt$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt=\frac{1}{2}F(1)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt\ \Rightarrow\ F'(x)=f(x)\qquad \mathbf{(1)}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt &= \int_0^1[e^{t-1}f(t)+e^{t-1}F(t)]dt\\ &= \int_0^1[e^{t-1}F'(t)+\left(e^{t-1}\right)'F(t)]dt=\\ &= \int_0^1\left[e^{t-1}F(t)\right]'dt\\ &= \left[e^{t-1}F(t)\right]_0^1 = F(1)-e^{-1}F(0)\qquad \mathbf{(2)}\end{aligned}$$

Η $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ για $x=0$ $\Rightarrow$ $F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$

$$(2)\ \Rightarrow\ \int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt=F(1)$$

ii)

$$\begin{aligned}h'(x) &= \frac{F'(x)\int_0^x t\,f(t)dt-\left(\int_0^x t\,f(t)dt\right)'F(x)}{\left(\int_0^x t\,f(t)dt\right)^2} = \frac{f(x)\int_0^x t\,f(t)dt-xf(x)F(x)}{\left(\int_0^x t\,f(t)dt\right)^2}\\ &= \frac{f(x)\left[\int_0^x t\,f(t)dt-xF(x)\right]}{\left(\int_0^x t\,f(t)dt\right)^2}\\ &= \frac{f(x)\left[\int_0^x t\,f(t)dt-x\int_0^x f(t)dt\right]}{\left(\int_0^x t\,f(t)dt\right)^2}\end{aligned}$$

$$= \frac{f(x)\left[\int_0^x t\, f(t)dt - \int_0^x x f(t)dt\right]}{\left(\int_0^x t\, f(t)dt\right)^2}$$

$$= \frac{f(x)\int_0^x (t-x)\, f(t)dt}{\left(\int_0^x t\, f(t)dt\right)^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Είναι
- $f(x) > 0\ ,\quad f(t) > 0$
- $0 < t < x \;\Rightarrow\; t - x < 0 \;\Rightarrow\; f(t)(t-x) < 0 \;\Rightarrow\; \int_0^x f(t)(t-x)dt < 0$

(3) $\Rightarrow$ $h'(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ $\Rightarrow$ h γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$

iii)

$F(x) = \int_0^x f(t)dt \;\Rightarrow\; F(2) = \int_0^2 f(t)dt$

$h(x) = \dfrac{F(x)}{\int_0^x t\, f(t)dt} \;\Rightarrow\; h(2) = \dfrac{F(2)}{\int_0^2 t\, f(t)dt} \;\Rightarrow\; \int_0^2 t\, f(t)dt = \dfrac{F(2)}{h(2)}$

Αρκεί να αποδείξουμε $\int_0^2 f(t)dt < 2\int_0^2 t\, f(t)dt$

$F(2) < 2\,\dfrac{F(2)}{h(2)}$

$1 < 2\,\dfrac{1}{h(2)}$

$h(2) < 2$

$h(2) < h(1)$ που ισχύει, αφού h γν.φθίνουσα.

iv)

$$\int_0^1 F(t)dt = \int_0^1 t'\, F(t)dt = \left[tF(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t\, F'(t)dt$$

$$= \left[tF(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t\cdot f(t)dt$$

$$= F(1) - \int_0^1 t\cdot f(t)dt \qquad \textbf{(4)}$$

Αλλά $h(1) = 2 \;\Leftrightarrow\; 2 = \dfrac{F(1)}{\int_0^1 tf(t)dt}$

$F(1) = 2\int_0^1 tf(t)dt$

$\dfrac{1}{2}F(1) = \int_0^1 tf(t)dt$

Οπότε η (4) γίνεται $\int_0^1 F(t)dt = F(1) - \dfrac{1}{2}F(1) = \dfrac{1}{2}F(1)$.

77.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $x > 0$

i) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

iii) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \ x > 0 \\ \kappa & , \ x = 0 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η g να είναι συνεχής .

iv) Αν $\kappa = -\dfrac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι η g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,\ e)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$f'(x) = 0 \iff x = -1$ ή $x = 1$

το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον πίνακα

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = 1$

οπότε για κάθε $x \in (0,\ +\infty)$ είναι $f(x) \geq f(1) = 1$

ii)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 - 2\ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(x - \frac{2\ln x}{x} \right)$$

Αλλά $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} = \cancel{\frac{+\infty}{+\infty}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2\ln x)'}{x'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1} = 0$

Οπότε $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty - 0 = +\infty$, επομένως δεν υπάρχουν πλάγιες ασύμπτωτες

iii)

Η g είναι συνεχής για κάθε $x > 0$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Για να είναι συνεχής στο π.ορισμού της, θα πρέπει να είναι συνεχής και στο $x = 0$.

Δηλαδή πρέπει $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^2 - 2\ln x} = \cancel{\dfrac{-\infty}{+\infty}}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^2 - 2\ln x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{2x - 2\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2 - 2} = -\frac{1}{2}$$

Και $g(0) = \kappa$. Άρα πρέπει $\kappa = -\dfrac{1}{2}$

iv)

Για $\kappa = -\dfrac{1}{2}$, η g είναι συνεχής στο $[0,\ e]$, με $g(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ και

$g(e) = \dfrac{1}{e^2 - 2} > 0$.

Άρα $g(0)g(e) < 0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\ e)$ έτσι ώστε $g(x) = 0$.

78.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+e^{x}}{1+e^{x+1}}$, $x\in\mathbb{R}$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$

iv) Για κάθε $x<0$ να αποδείξετε ότι $f(5^x)<f(6^x)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$f'(x)=\dfrac{e^{x}(1-e)}{(1+e^{x+1})^2}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ii)

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+1}{x(1+e^{x+1})}=\frac{0+1}{-\infty(1+0)}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x}+1}{1+e^{x+1}}=\frac{0+1}{1+0}=1 \quad\Rightarrow\quad \beta=1$$

Επομένως η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{x(1+e^{x+1})}=\cancel{\frac{+\infty}{+\infty}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x}+1)'}{[x(1+e^{x+1})]'}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{1+e^{x+1}+xe^{x+1}}=\cancel{\frac{+\infty}{+\infty}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x})'}{(1+e^{x+1}+xe^{x+1})'}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x+1}+e^{x+1}+xe^{x+1}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x+1}(2+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e(2+x)}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)&==\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}+1}{1+e^{x+1}}=\cancel{\frac{+\infty}{+\infty}}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{x}+1)'}{(1+e^{x+1})'}\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{e^{x+1}}=\frac{1}{e} \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

Επομένως η ευθεία $y=\dfrac{1}{e}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

iii)

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{1+e^{x+1}}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{1+e^x - e^x + e^{x+1}}{1+e^x}dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} + \frac{e^{x+1} - e^x}{1+e^x} \right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{e^x(e-1)}{1+e^x} \right)dx$$

$$= \left[x + (e-1)\ln(e^x+1) \right]_0^1 = \quad .....$$

iv)

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα , αρκεί να αποδείξουμε ότι $5^x > 6^x$

$$\frac{5^x}{6^x} > 1$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x, \quad x < 0$

Επειδή $0 < \frac{5}{6} < 1$, η φ είναι γνησίως φθίνουσα.

Οπότε : $x < 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0) \Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^x > \left(\frac{5}{6}\right)^0$

79.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln(x+1)-(x+1)\ln x\,,\quad x>0$

i) Να αποδείξετε ότι $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}\quad,\ x>0$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha\in(0,\ +\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha}=\alpha^{\alpha+1}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

Η συνάρτηση $g(x)=\ln x$ στο διάστημα $[x,\ x+1]$ με $x>0$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Οπότε, από το θεώρημα της μέσης τιμής , θα υπάρχει $\xi\in(x,\ x+1)$

έτσι ώστε $\quad g'(\xi)=\dfrac{g(x+1)-g(x)}{x+1-x}=g(x+1)-g(x)$

$$g'(\xi)=\ln(x+1)-\ln x$$

Όμως $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ και $g''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$, άρα η g' είναι γνησίως φθίνουσα .

Επομένως : $\quad x<\xi\ \Rightarrow\ g'(x)>g'(\xi)\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{x}>\ln(x+1)-\ln x$

ii)

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}-\ln x-\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}-\frac{x}{x}+\frac{x}{x+1}$$

Προσαρμογή στο i

$$=\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}\right]-1+\frac{x}{x+1}$$

$$=\left[\ln(x+1)-\ln x-\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x+1}$$

Όμως από το (i) $\ \Rightarrow\ \ln(x+1)-\ln x-\dfrac{1}{x}<0$,

και αφού $x>0$, είναι $\dfrac{1}{x+1}>0$.

Άρα $f'(x)<0$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα .

iii)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\cancel{(+\infty)\cdot 0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\cancel{\frac{0}{0}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$$

iv)

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $(x+1)^x = x^{x+1}$

$\ln(x+1)^x = \ln x^{x+1}$

$x\ln(x+1) = (x+1)\ln x$

$x\ln(x+1) - (x+1)\ln x = 0$

$f(x) = 0$

Πάμε για Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Είναι $f(x) = x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$

$= x\ln(x+1) - x\ln x - \ln x$

$= x[\ln(x+1) - \ln x] - \ln x$

$= x\ln\frac{x+1}{x} - \ln x$

Προσαρμογή στο iii

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x} - \ln x\right)$

$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x}\right) - \lim_{x\to+\infty}\ln x = 1 - (+\infty) = -\infty$

Επίσης $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[x\ln(x+1) - (x+1)\ln x] = 0 - (-\infty) = +\infty$

Επομένως , το σύνολο τιμών της f είναι το $(-\infty, +\infty)$, στο οποίο ανήκει το 0 , οπότε θα υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $f(\alpha) = 0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, το α θα είναι μοναδικό.

80.

Συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Για τους μιγαδικούς $z_x = 1 + if'(x)$, $w_x = 1 + if(x)$, όπου $x \in \mathbb{R}$, δίνεται ότι ο $z_x \cdot w_{-x}$ είναι φανταστικός και $w_0 = 1 + i$. Να αποδείξετε ότι :

i) $f'(x)\, f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f'(-x)\, f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iii) $f(-x)\, f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

iv) $z_x = w_x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

i)

$z_x\, w_{-x}$ φανταστικός $\Leftrightarrow$ $z_x\, w_{-x} = -\overline{z_x w_{-x}}$

$$z_x\, w_{-x} = -\overline{z_x}\ \overline{w_{-x}}$$

$$[1 + if'(x)][1 + if(-x)] = -[1 - if'(x)][1 - if(-x)]$$

$$1 + 1 + if(-x) + if'(x) - f'(x)\, f(-x) = -1 + if(-x) + if'(x) + f'(x)\, f(-x)$$

$$2 = 2 f'(x)\, f(-x)$$

$$1 = f'(x)\, f(-x) \quad \textbf{(1)}$$

ii)

Προκύπτει από την (1) θέτοντας όπου x το –x : $f'(-x)\, f(x) = 1$ **(2)**

iii)

(1), (2) $\Rightarrow$ $f'(x)\, f(-x) = f(x)\, f'(-x)$

$f'(x)\, f(-x) - f(x)\, f'(-x) = 0$

$f'(x)\, f(-x) + f(x)\, \big(f(-x)\big)' = 0$

$\big(f(x).f(-x)\big)' = 0$

$f(x).f(-x) = c$ στο $\mathbb{R}$ **(3)**

$w_0 = 1 + i \ \Rightarrow\ 1 + if(0) = 1 + i \ \Rightarrow\ f(0) = 1$

Για $x = 0$, η (3) $\Rightarrow$ $f(0).f(0) = c \ \Rightarrow\ 1\,.\,1 = c \ \Rightarrow\ c = 1$

Η (3) γίνεται $f(x).f(-x) = 1$ στο $\mathbb{R}$ **(4)**

iv)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x) = f(x)$

Μεταξύ των (1) , (4) κάνουμε απαλοιφή της $f(-x)$:

(1) $\Rightarrow$ $f(-x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Η (4) γίνεται $f(x)\,\dfrac{1}{f'(x)} = 1$ $\Rightarrow$ $f(x) = f'(x)$